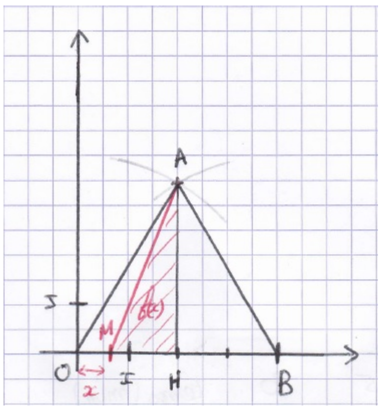
Corrigé du Devoir Maison 1

Solution de l'exercice 1.

1. D'après la formule du cours, on a

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_0)^2} \\ &= \sqrt{(2-0)^2 + (2\sqrt{3}-0)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2\sqrt{3}^2} \\ &= \sqrt{4 + 4\times 3} \\ &= \sqrt{16} = 4. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(4-2)^2 + (0-2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2\sqrt{3}^2} \\ &= \sqrt{4 + 4\times 3} \\ &= \sqrt{16} = 4. \end{aligned}$$

   Ainsi les distances OA et AB sont égales et valent $AO = AB = 4$.
2. Grâce à la feuille quadrillée, on écarte le compas d'une longueur égale à 4. On sait que A est à une distance 4 du point O c'est-à-dire sur le cercle de centre O et de rayon 4. On trace donc à l'aide du compas la portion de ce cercle où A est susceptible de se trouver en piquant au point O. Puis comme AB vaut également 4, le point A est aussi sur le cercle de centre B et de rayon 4. En piquant en B, on trace une deuxième portion de cercle. Les deux arcs de cercle se coupent en un unique point : le point A.
3.



4. On sait que $AO = AB = 4$. De plus la distance OB est facilement calculable :
$$OB = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4^2} = 4.$$
   Donc on remarque que $AO = AB = OB$. Le triangle ABO est donc équilatéral.
5. Puisque le triangle ABO est équilatéral, on sait que ses médiatrices, hauteurs, médianes et bissectrices sont confondues. Ainsi, la hauteur (AH) est aussi la médiatrice de OB. Puisque H appartient à la médiatrice de OB, il est équidistant de O et de B : $OH = HB$. Or le point H par construction appartient à la droite (OB). Donc le point H est le milieu du segment $[OB]$.
6. Par la formule du cours on a
$$\begin{aligned} x_H &= \frac{x_0 + x_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \\ y_H &= \frac{y_0 + y_B}{2} = \frac{0+0}{2} = 0. \end{aligned}$$
   Donc le point H a pour coordonnées $(2; 0)$.

7. D'après l'énoncé, on ne construit le triangle AMH que pour des points M appartenant à $[OB]$. Son abscisse x est donc comprise entre 0 et 4. L'ensemble de définition de f est donc $[0;4]$.
8. On rappelle que l'aire d'un triangle est donné par la formule suivante :

$$Aire = \frac{base \times hauteur}{2}.$$

Lorsque $x \leqslant 2$, c'est-à-dire lorsque M est à gauche de H, la hauteur est AH et la base associée et MH. Calculons ces deux distances.

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (0 - 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$
$$MH = \sqrt{(x_H - x_M)^2 + (y_H - y_M)^2} = \sqrt{(2-x)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(2-x)^2} = 2 - x.$$

On en déduit directement la valeur de $f(x)$: pour tout $x \in [0;2]$

$$f(x) = \frac{AH \times MH}{2} = \frac{2\sqrt{3}(2-x)}{2} = \sqrt{3}(2-x).$$

9. Lorsque $x \in [2;4]$, c'est-à-dire lorsque M est à droite de H, la hauteur est toujours AH et la base MH et la distance $AH = 2\sqrt{3}$ ne change pas. Attention cependant le valeur de MH elle va se modifier. Il est clair que $2 - x \neq 0$ lorsque $x \geqslant 2$. Une distance NE PEUT PAS ETRE NEGATIVE, ce qui souligne bien que dans cette configuration $MH \neq 2 - x$. Revoyons le calcul :

$$MH = \sqrt{(x_H - x_M)^2 + (y_H - y_M)^2} = \sqrt{(2-x)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(2-x)^2}.$$

Cette formule est toujours vraie. La différence est dans les rappels suivants :

$$\sqrt{a^2} = a \quad \text{si } a \geqslant 0 \qquad \sqrt{a^2} = -a \quad \text{si } a \geqslant 0.$$

On rappelle également que $(\sqrt{a})^2 = a$ pour tout $a \geqslant 0$ (la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas !). Grâce à ces rappels, on en déduit que

$$MH = -(2-x) = x - 2.$$

Ainsi, on obtient

$$f(x) = \frac{AH \times MH}{2} = \frac{2\sqrt{3}(x-2)}{2} = \sqrt{3}(x-2).$$

10.
$$\begin{array}{lll}
\text{Si} \quad 0 \leqslant u \leqslant v \leqslant 2, & \text{alors} & -u \geqslant -v \\
 & \text{donc} & 2-u \geqslant 2-v. \\
 & \text{Or } 2\sqrt{3} \geqslant 0 \text{ d'où} & (2-u)2\sqrt{3} \geqslant (2-v)2\sqrt{3}.
\end{array}$$

11. De la question précédente, on en déduit que pour tout réels u et v dans $[0;2]$, si $u \leqslant v$ alors $f(u) = \frac{(2-u)2\sqrt{3}}{2} \geqslant \frac{(2-v)2\sqrt{3}}{2} = f(v)$. Donc la fonction f est décroissante sur $[0;2]$.
12.
$$\begin{array}{lll}
\text{Si} \quad 2 \leqslant u \leqslant v \leqslant 4, & \text{alors} & u-2 \leqslant v-2 \\
 & \text{Or } \sqrt{3} \geqslant 0 \text{ d'où} & \sqrt{3}(u-2) \leqslant \sqrt{3}(v-2) \\
 & \text{d'où} & f(u) \leqslant f(v).
\end{array}$$

On en déduit que f est croissante sur $[2;4]$.

13. Afin de remplir le tableau de variations de f, nous avons besoin des images de 0, 2 et 4. En 0, d'après la question 8,

$$f(0) = (2-0)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

En 2 nous avons (en prenant la formule de la question 8 ou de la question 9)

$$f(2) = (2-2)\sqrt{3} = 0 \qquad \text{le triangle est plat)}$$

Enfin en 4, par la question 9, nous avons

$$f(4) = (4-2)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

En conséquence, voici le tableau de variations de f :

x	0	2	4
$f(x)$	$2\sqrt{3}$ ↘	0	↗ $2\sqrt{3}$

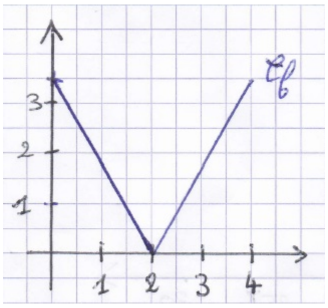
14. Pour le tableau 1, la liste démarre à $x = 0$, dans *DébTbl/débutTbl* on met donc 0 et le pas *Pas/Tbl* est de $0,2$. Dans le tableau 2, on démarre *DébTbl/débutTbl* à 2 et le pas *Pas/Tbl* est toujours de $0,2$.

Tableau 1

x	**0**	**0,2**	**0,4**	**0,6**	**0,8**	**1**	**1,2**	**1,4**	**1,6**	**1,8**	**2**
f(x)	3,5	3,1	2,8	2,4	2,1	1,7	1,4	1	0,7	0,3	0

Tableau 2

x	**2**	**2,2**	**2,4**	**2,6**	**2,8**	**3**	**3,2**	**3,4**	**3,6**	**3,8**	**4**
f(x)	0	0,3	0,7	1	1,4	1,7	2,1	2,4	2,8	3,1	3,5



Solution de l'exercice 2.
Partie 1 : étude générale.

1. Dans le cas de l'option C, chaque heure est sous-traitée et coûte à l'entreprise 110 €. Une heure coûtera 110 €, deux heures 220 €, trois heures 330 €, etc. Donc pour x heures le coût est de :

$$c_C(x) = 110 \times x = 110x \text{ €}.$$

2. Puisque les deux informaticiens embauchés par l'entreprise suffisent pour faire toutes les réparations, l'entreprise n'a pas de frais supplémentaires (pas d'heure sous-traitée) en dehors des deux salaires des informaticiens et ce quelque soit x le nombre d'heures de réparation nécessaire. Donc pour tout $x \geqslant 0$, l'entreprise doit payer les deux salaires :

$$c_A(x) = 2000 \times 2 = 4000 \text{ €}.$$

3. Soit x un réel positif. Le choix A est plus intéressant que le choix C si $c_A(x) \leqslant c_C(x)$ c'est-à-dire si

$$4000 \leqslant 110x \Leftrightarrow \frac{4000}{110} \leqslant x \qquad \text{(le signe de l'inégalité ne change pas car } 110 \geqslant 0)$$
$$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{400}{11} \equiv 36,4.$$

On en déduit que pour un nombre d'heures inférieur ou égal à 36, la formule C est plus rentable (l'entreprise a intérêt à sous traiter) tandis que pour un nombre d'heures supérieur ou égal à 37, la formule A est plus rentable (l'entreprise a intérêt à embaucher deux informaticiens).

4. On a vu que le coût c_A est constant et correspond à la courbe $\mathscr{C}_1$. Le coût c_C au contraire augmente toujours linéairement (droite linéaire de pente 110) et correspond donc à la courbe $\mathscr{C}_2$. Le dernier coût c_B correspond donc à la courbe $\mathscr{C}_3$, d'abord constant jusqu'à 35 puis augmentant linéairement (avec une pente également de 110).
5. Si $x \in [0; x_1]$, on voit que la courbe la plus basse est la courbe $\mathscr{C}_2$. Cela signifie que le coût associé c_C est plus petit que les deux autres coûts c_A et c_B. Donc la formule C (sous traiter) est la plus rentable pour l'entreprise pour un nombre d'heures $x \in [0; x_1]$.
6. Au contraire lorsque $x \in [x_1; x_2]$, la courbe $\mathscr{C}_3$ est la plus basse, le coût associé c_B est le plus faible. La formule B (un seul informaticien embauché) est donc la plus rentable pour l'entreprise pour $x \in [x_1; x_2]$.

Partie 2 : étude avec données statistiques.

8. La société effectue un relevé du nombre d'heures par semaine nécessaire pour la maintenance de son parc chaque semaine pendant un an. Les relevés sont donnés dans le tableau suivant :

Temps de maintenance *(en heures)*	$[0;10[$	$[10;20[$	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$	Total
Nombre de semaines	1	2	7	13	29	52
Fréquences	$\frac{1}{52} \simeq 0,019$	$\frac{2}{52} \simeq 0,038$	$\frac{7}{52} \simeq 0,135$	$\frac{13}{52} = 0,25$	$\frac{29}{52} \simeq 0,558$	1
Fréquences cumulées	$\frac{1}{52} \simeq 0,019$	$\frac{3}{52} \simeq 0,058$	$\frac{10}{52} \simeq 0,192$	$\frac{23}{52} = 0,442$	1	$\times$

9. La fréquence cumulée dépasse $0,25$ à partir de la classe $[30; 40[$ qui correspond donc à la classe du premier quartile. Elle ne dépasse $0,5$ et $0,75$ du même coup qu'à la dernière classe. La classe $[40; 50[$ est donc la classe médiane ainsi que celle du troisième quartile.
10. Les représentants des classes sont donnés par : celui de $[0; 10[$ est $(10 - 0)/2 = 5$, celui de $[10; 20[$ est 15, celui de $[20; 30[$ est 25, celui de $[30; 40[$ est 35 et celui de $[40; 50[$ est 45. La moyenne est alors :
$$x_0 = \frac{1 \times 5 + 2 \times 15 + 7 \times 25 + 13 \times 35 + 29 \times 45}{52} = \frac{1970}{52} = \frac{985}{26} \simeq 37,9.$$
11. Par la Partie 1, on a toujours $c_A(x_0) = 4000$ €. Puisque $x_0 \geqslant 35$, c'est la seconde ligne de la définition de c_B que l'on utilise :
$$\begin{aligned} c_B(x_0) &= 110\,(x_0 - 35) + 2000 \\ &= 110\left(\frac{985}{26} - \frac{26 \times 35}{26}\right) + 2000 \\ &= 110\frac{985 - 910}{26} + 2000 \\ &= \frac{110 \times 75}{26} + 2000 = \frac{55 \times 75}{13} + 2000 = \frac{4125}{13} + \frac{26000}{13} = \frac{30125}{13} \simeq 2317\text{ €}. \end{aligned}$$
Enfin, le coût c_C est donné par
$$c_C(x_0) = 110x_0 = 110\frac{985}{26} = \frac{55 \times 985}{13} = \frac{54175}{13} \simeq 4167\text{ €}.$$
12. On remarque que $c_B(x_0) \leqslant c_A(x_0) \leqslant c_C(x_0)$. Ainsi la formule B est la plus rentable pour cette entreprise.